Chapitre III

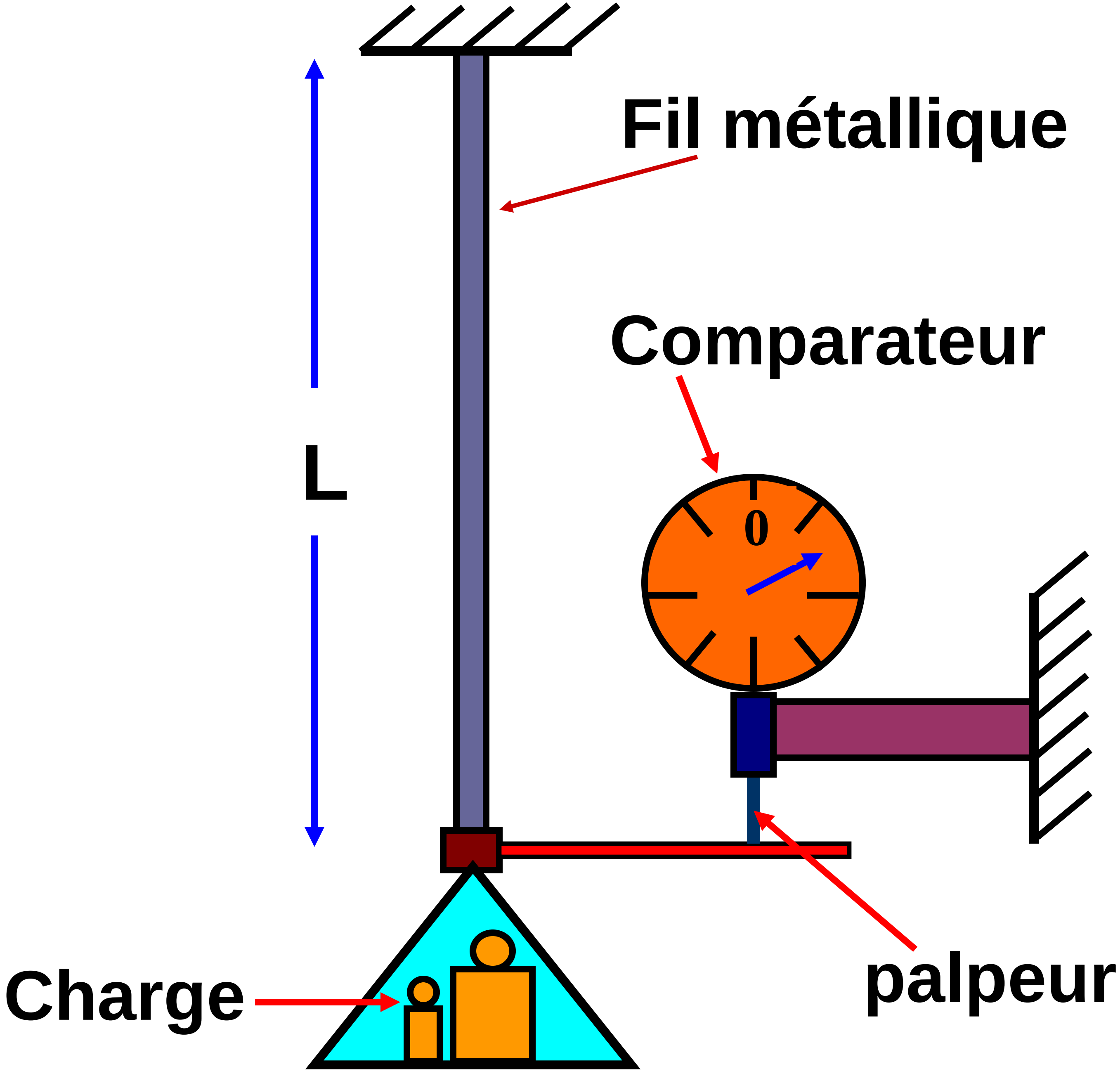
TRACTION

COMPRESSION

I Essai de traction simple

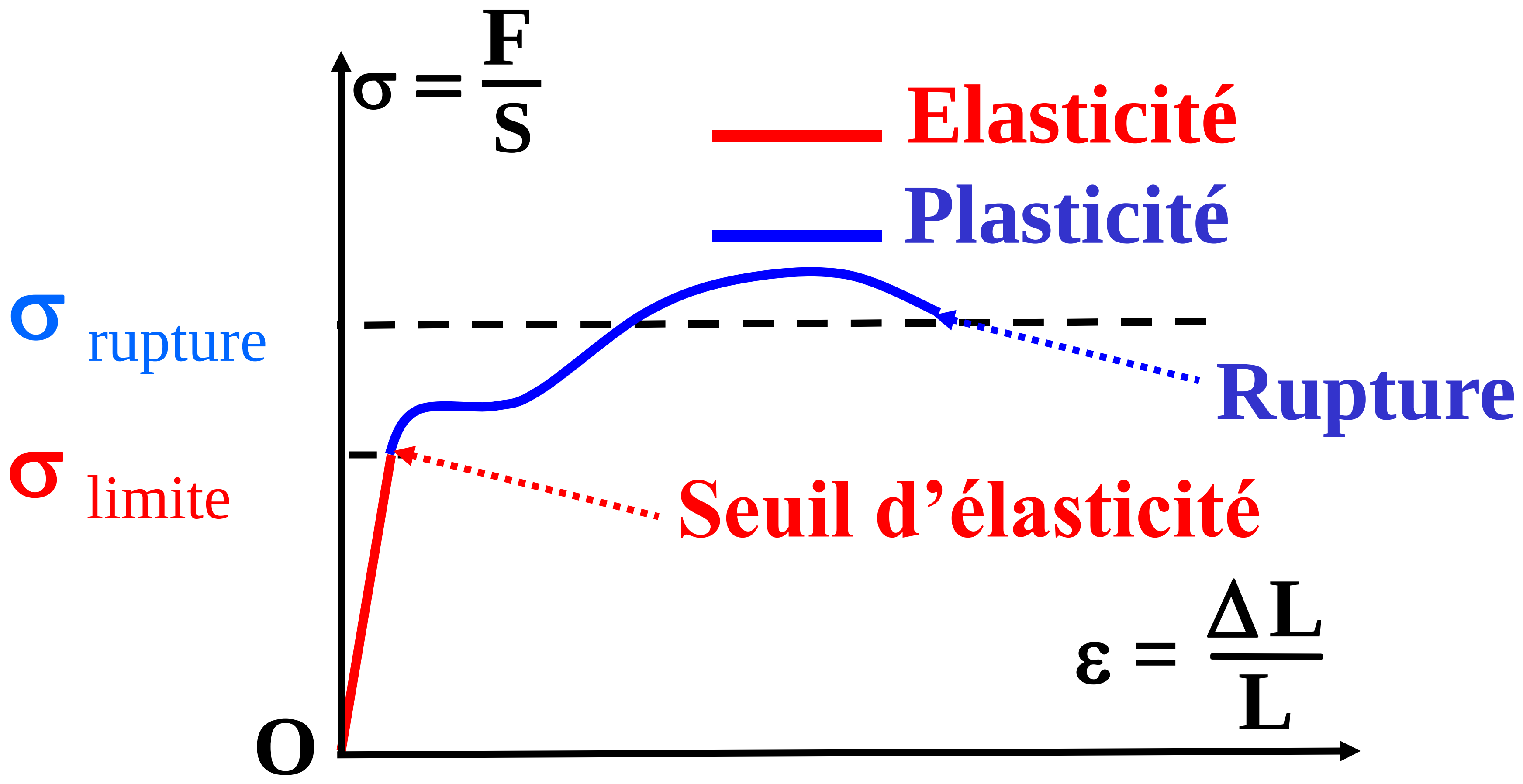
C'est à Robert Hooke (Physicien et astronome anglais 1635-1703) que revient les premières études expérimentales sur l'élasticité des matériaux (en 1678).

Analysons l'effet d'un essai de traction sur une longue barre (ou un fil) en métal.

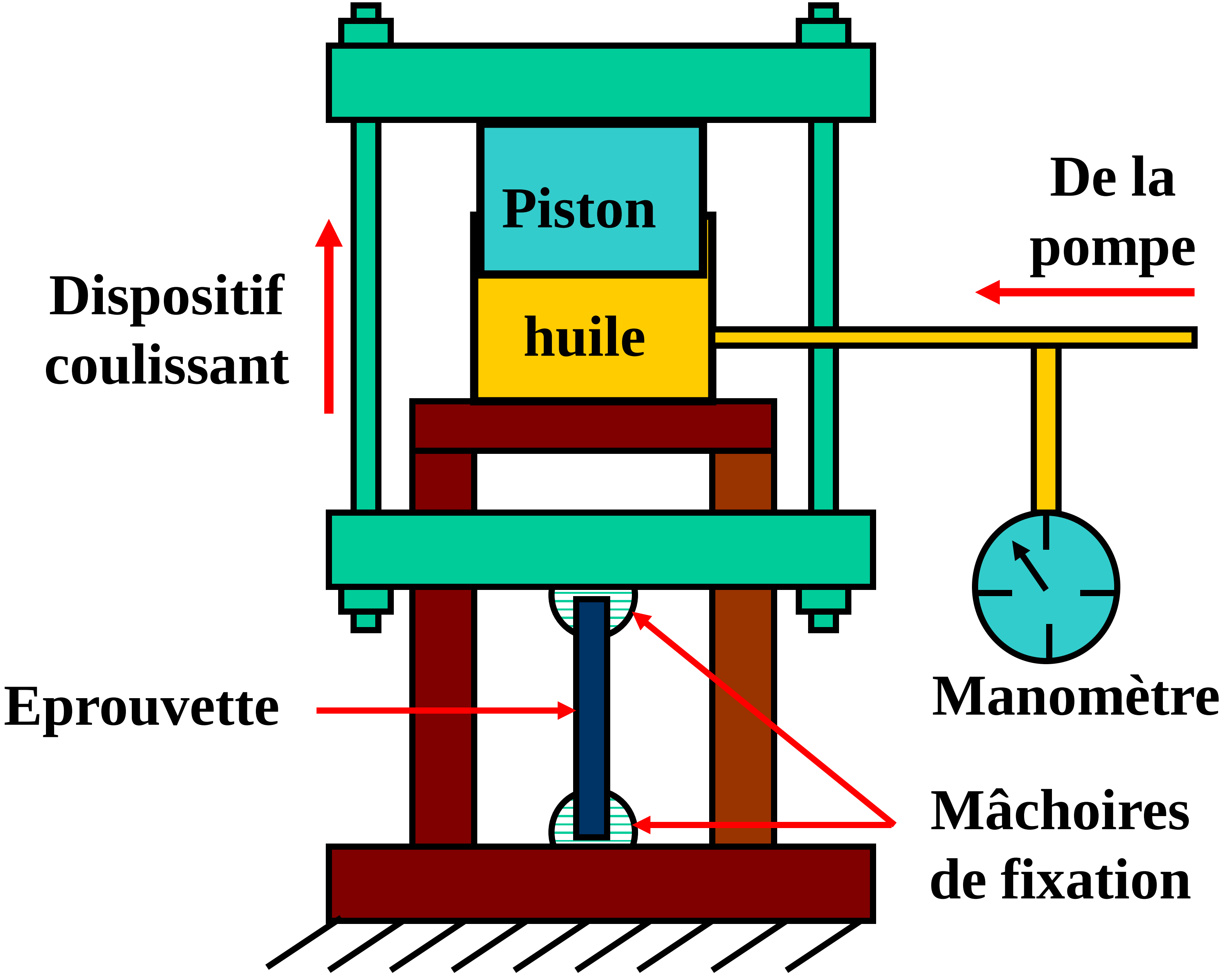


Fil métallique
Comparateur
0
L
Charge
palpeur

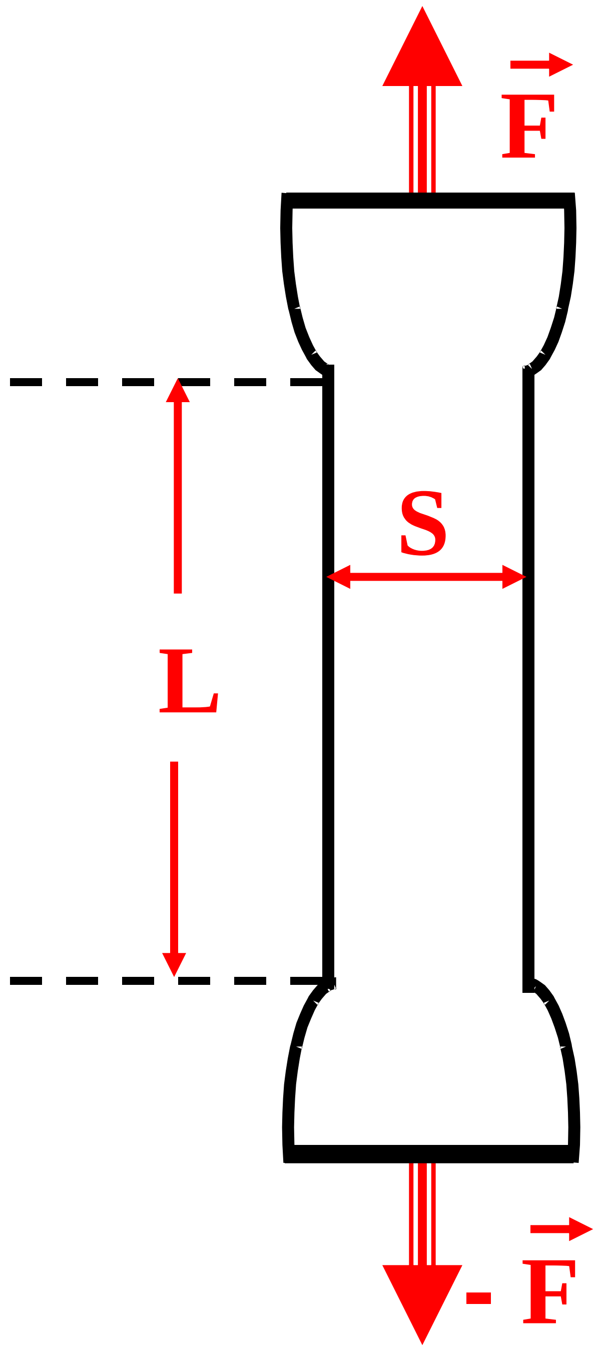
II Diagramme contrainte-déformation



S et L sont respectivement la section et la longueur initiales du fil métallique.



Machine de traction



Coupe longitudinale d’une éprouvette en traction

Diagramme contrainte-déformation de l'acier à l'aide d'une machine de traction-compression

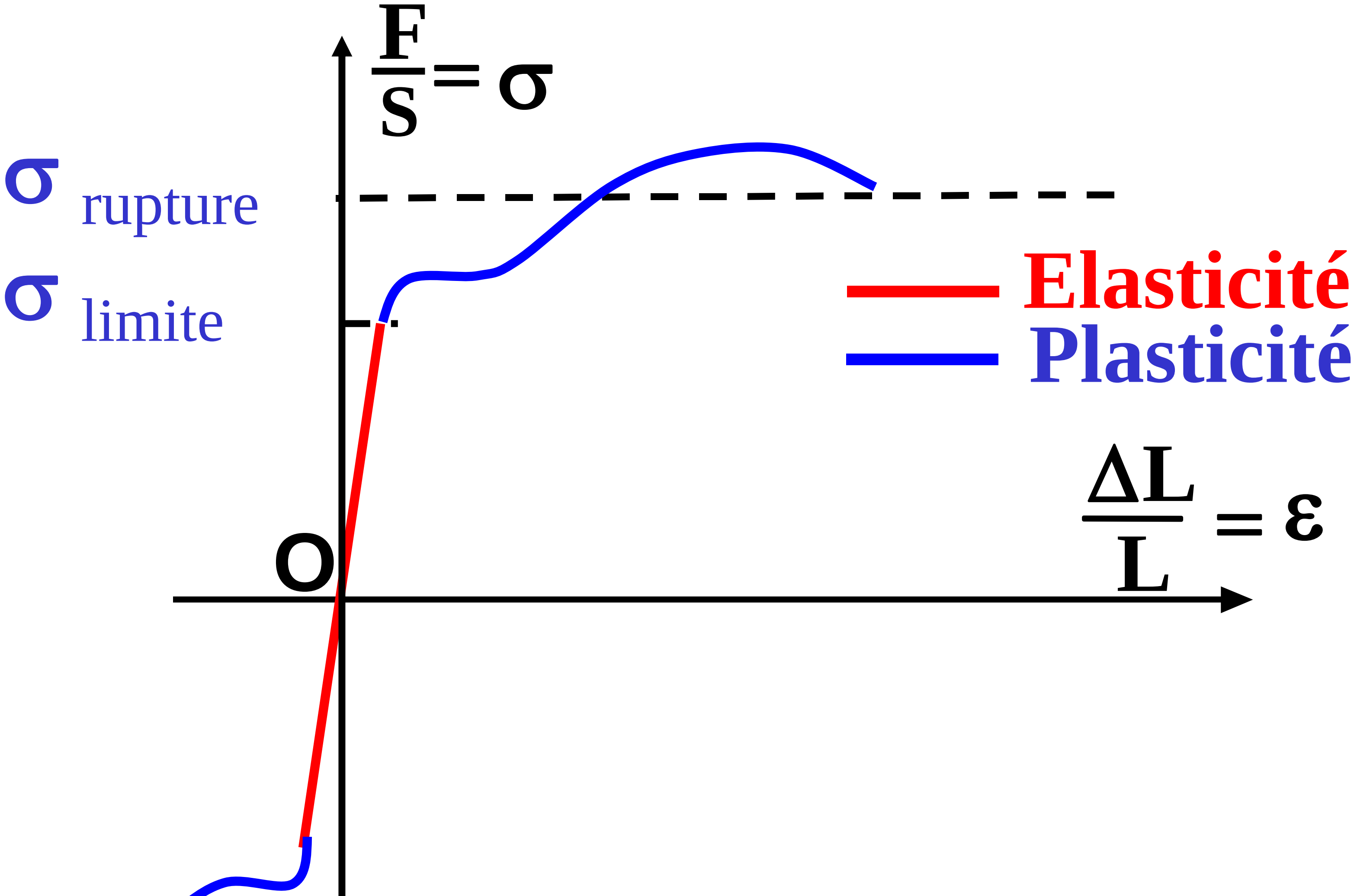


Diagramme contrainte-déformation de la fonte (matériau fragile)

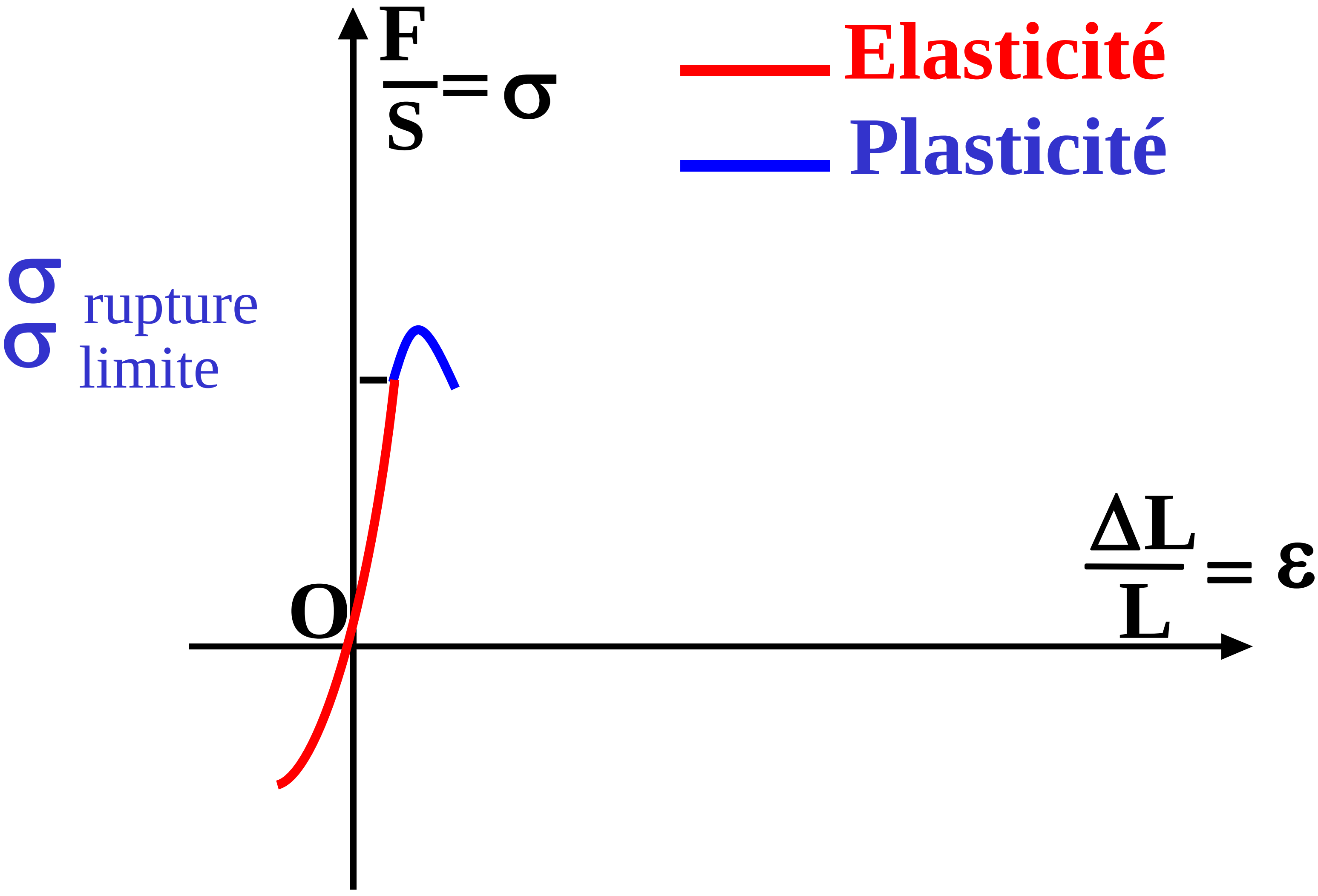


Diagramme contrainte-déformation du marbre

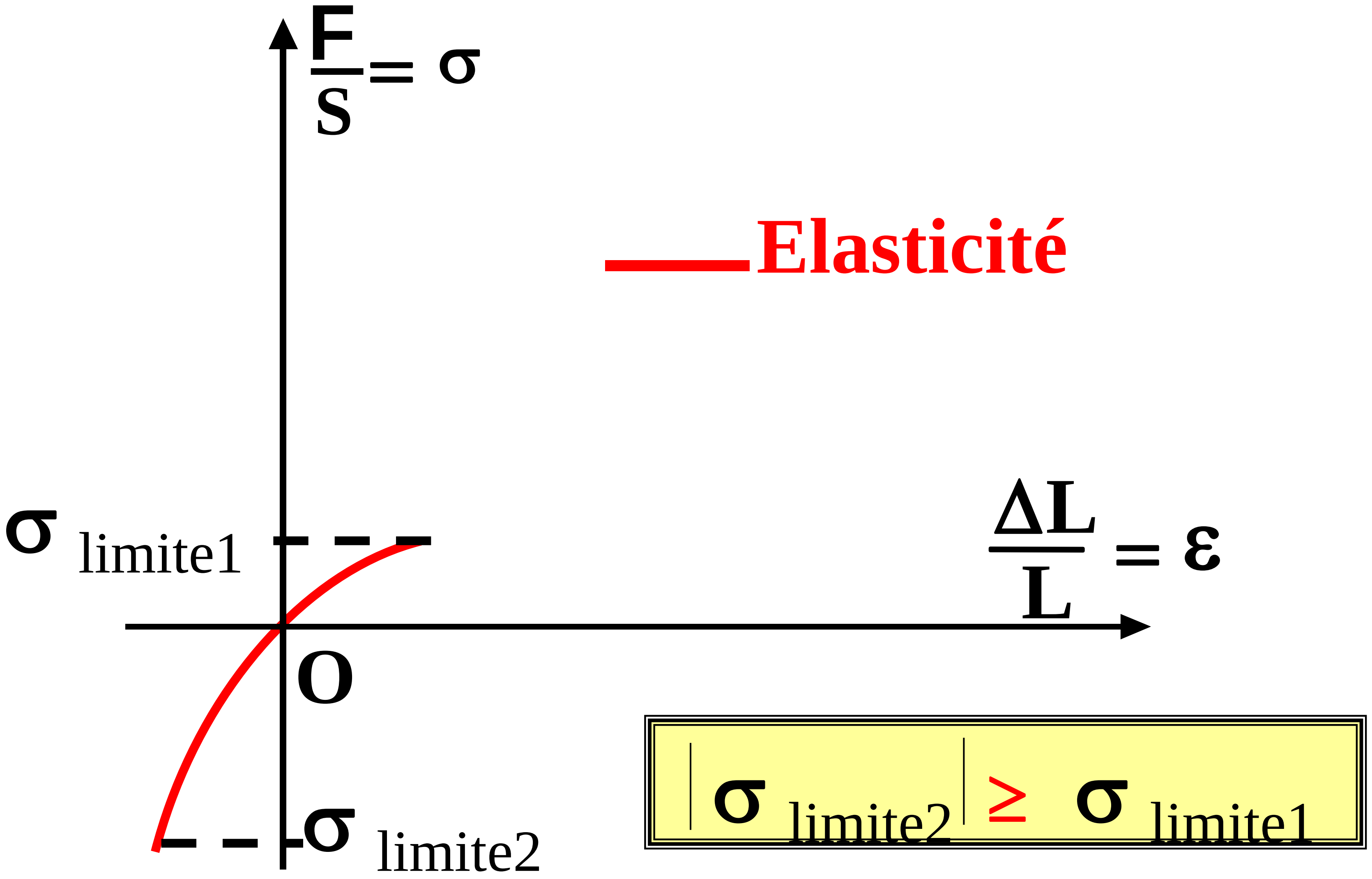
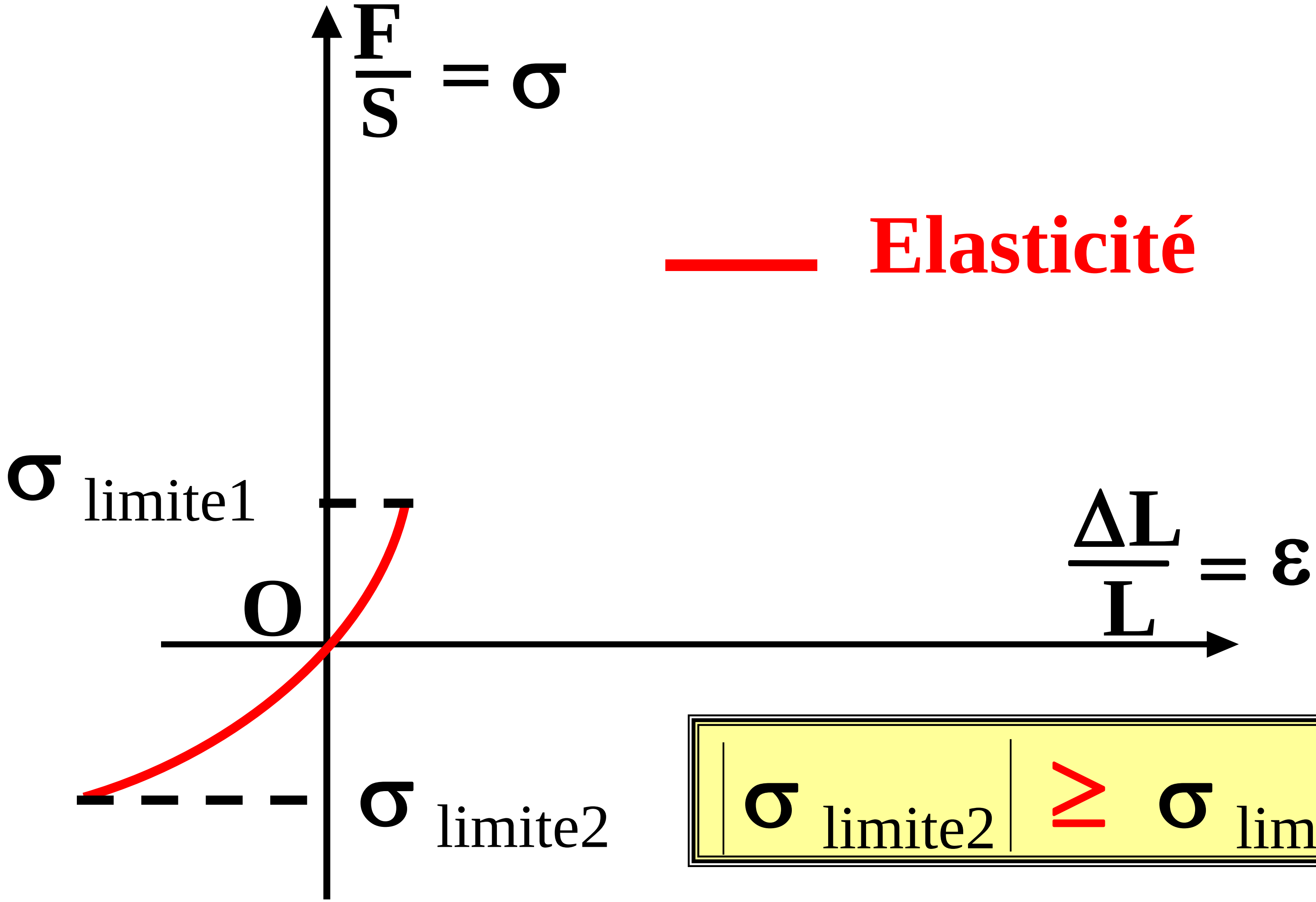


Diagramme contrainte-déformation du béton



$$\left|\sigma_{limite2}\right| \geq \sigma_{limite1}$$

III Loi de Hooke

1) Expression de la loi

Loi de Hooke en élasticité linéaire

(1676)

☞ $$\boxed{\sigma = E\,.\varepsilon}$$

et $$\boxed{E = \frac{\sigma}{\varepsilon}}$$

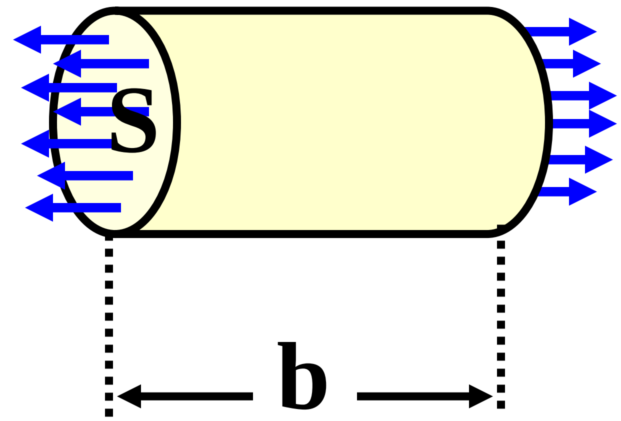
2) Module d'élasticité

E est le module d'Young (Thomas Young: Médecin et physicien anglais 1773-1829) ou module d'élasticité longitudinale.

☞ **E est exprimé en N/m^2 ou Pa.**

3) Remarque

La loi de Hooke est en effet une loi locale. Considérons un tronçon d'éprouvette de longueur infiniment petite b et qui subit un allongement Δ b.



Tronçon d’éprouvette

En tout point M de la section S, la contrainte est définie par :

☞ $$\boxed{\sigma(M) = \frac{F}{S} = \lim_{\Delta S \to 0} \frac{\Delta F}{\Delta S} = E\varepsilon(M)}$$

Pour un matériau homogène, l'effort normal est répartie dans chaque section de façon uniforme.

☞ $$\sigma(M) = Cte = \frac{\Delta F}{\Delta S} = \frac{F}{S} = E\frac{\Delta b}{b} = E\frac{\Delta L}{L}$$

4) Quelques valeurs du module de Young

Matériau	E en GPa
Acier de construction	210
Cuivre	124
Bois	3 à 20
Fonte	83 à 170
Aluminium	69
Verre	69
Béton	20 à 50

Exercice 1

Un barreau rectiligne de section constante $S = 6\ cm^2$ et de longueur $L = 4\ m$ est soumis à une tension axiale $F = 126000\ N$. Trouver son module de Young sachant que son allongement total est $\Delta L = 0,40\ cm$.

IV Dimensions après traction ou compression

1) Dimension longitudinale

L'expérience montre que lors d'un essai de traction ou de compression d'une barre d'essai, la dimension longitudinale subit une augmentation ou une diminution.

$$\sigma = \frac{F}{S}$$

et

$$\varepsilon = \frac{\Delta L}{L}$$

F : la charge

S : la section

L : la longueur initiale

ΔL : la variation de longueur

donne

$$\boxed{\Delta L = \frac{FL}{ES}}$$

- **ΔL > 0 pour une traction.**
- **ΔL < 0 pour une compression.**

2) Rigidité du barreau

La rigidité du barreau notée K est donné par la formule suivante :

☞ $$\boxed{K = \frac{F}{\Delta L} = \frac{ES}{L}}$$

3) Remarque

Pour toute variation de charge ou de section, il faut faire intervenir une longueur infinitésimale dL et écrire :

$$\boxed{\Delta(dL) = \frac{F}{ES}\, dL}$$

$$\boxed{\Delta L = \int_{0}^{L} \frac{F}{ES}\, dL}$$

F est la charge appliquée à l'élément dL

Exercice 2

Un fil d'aluminium de 30 m de long est soumis à une contrainte de tension de 700 Kg/cm^2. Calculer l'allongement total du fil.

4) Dimension transversale

L'expérience montre que lors d'un essai de traction d'une barre d'essai, la dimension transversale subit une diminution.

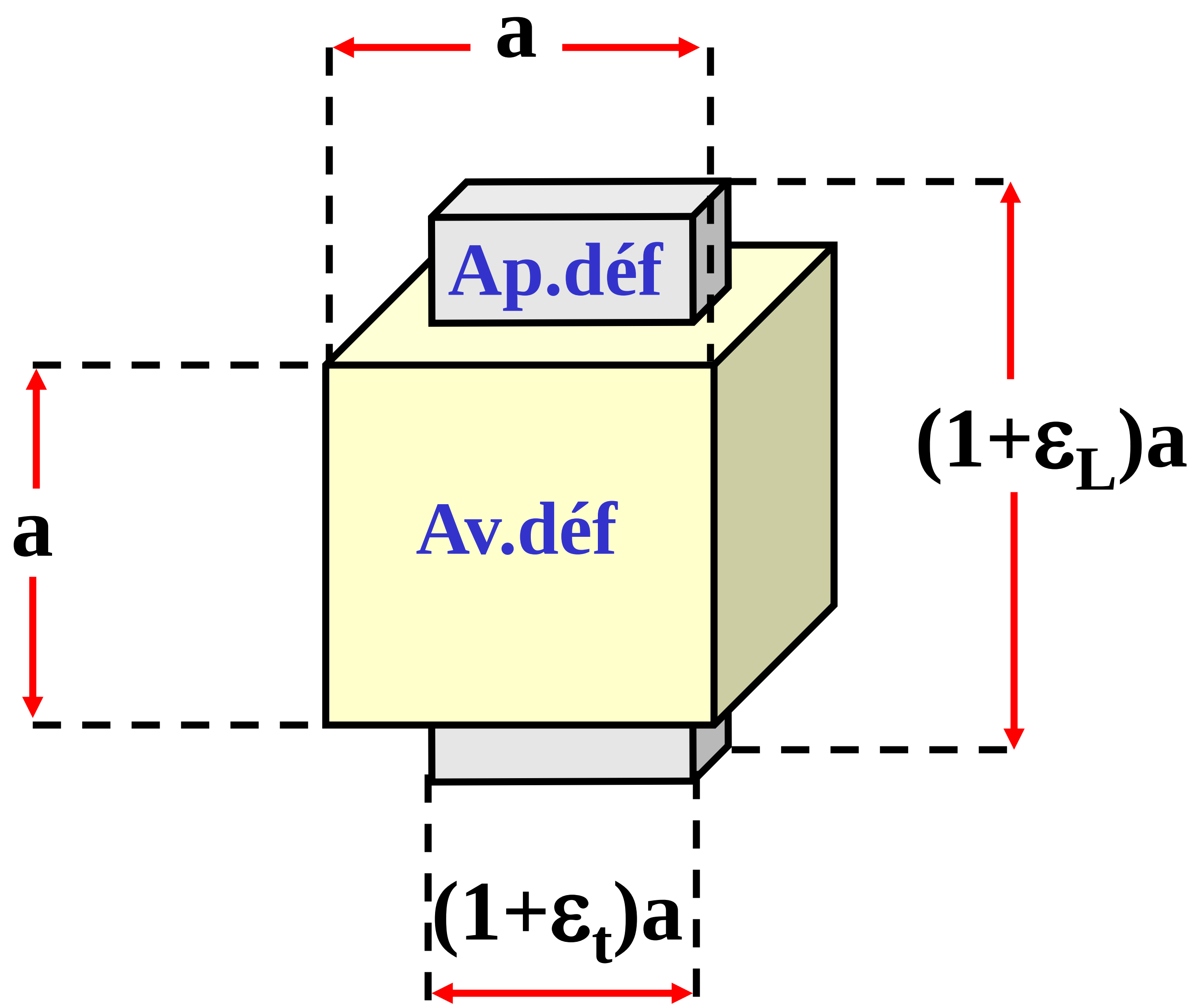
On pose : $$\boxed{\nu = -\frac{\varepsilon_t}{\varepsilon_L}}$$

$0 \leq \nu \leq 0{,}5$

$\varepsilon_L \geq 0$; $\varepsilon_t \leq 0$

☞ **ν est le module de Poisson (savant français 1781-1840), ou module de compression transversale.**

5) Variation du volume



La variation du volume de l’élément cube découpé dans la barre d’essai est:

$$
\begin{aligned}
\Delta V &= a^3(1+\varepsilon_L)(1+\varepsilon_t)^2 - a^3 \\
&= a^3(1+\varepsilon_L)(1-\nu\,\varepsilon_L)^2 - a^3 \\
&\approx (1-2\nu)\,\varepsilon_L\, a^3 \\
&\approx (1-2\nu)\frac{\Delta L}{L} V
\end{aligned}
$$

$$
\frac{\Delta V}{V} \approx (1-2\nu)\frac{\Delta L}{L}
$$

D'après l'expérience, le volume d'une barre ne peut pas diminuer en traction, alors :

☞ $$\boxed{0 \leq \nu \leq \frac{1}{2}}$$

matériau homogène

6) Quelques valeurs du coefficient de Poisson

Matériau	ν
Cuivre	0,33
Aluminium	0,33
Acier de construction	0,27 à 0,30
Laiton	0,37
Fontes	0,21 à 0,26
Verre	0,18 à 0,30
Béton	0,20

V Coefficient de sécurité pour les charges en traction

En pratique on affecte à la limite élastique des matériaux σ_{limite}, un coefficient dit de sécurité α compris entre 1 et 10.

Condition de résistance :

$$\boxed{\sigma_{maxi} \leq \frac{\sigma_{limite}}{\alpha}}$$

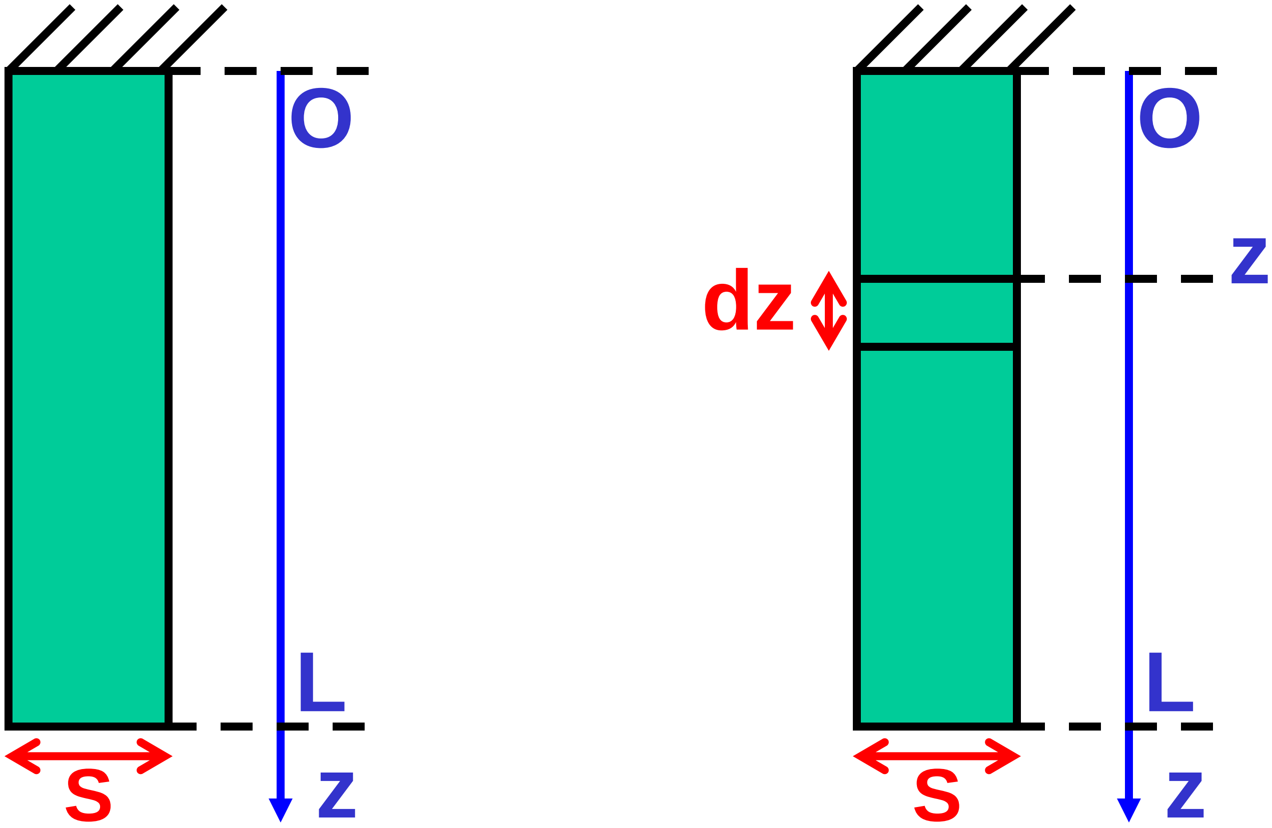
Exercice 3

Un barreau carré d'acier de côté $a = 5$ cm et de longueur $L=1m$ est soumis à une tension axiale $F=32.10^4$ N.

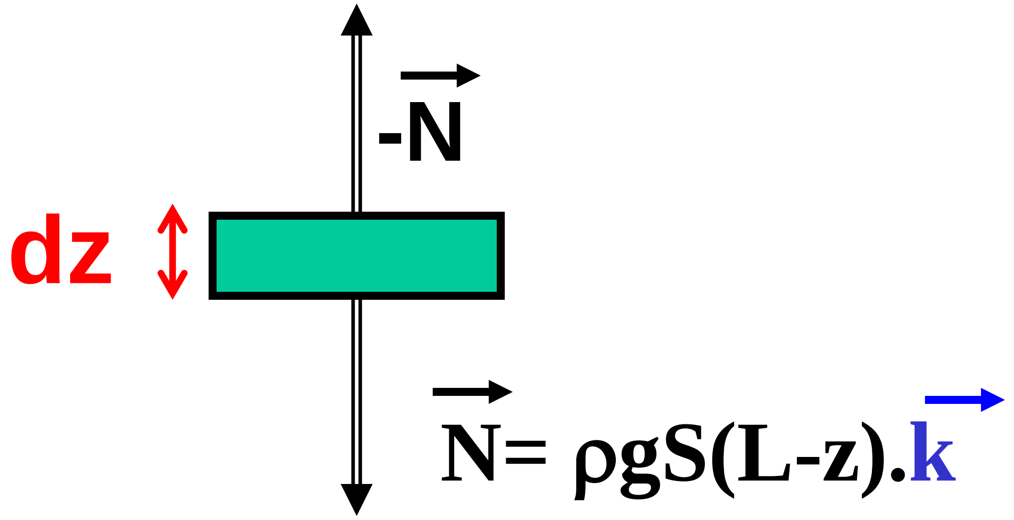
1) Calculer l'allongement du barreau.

2) Déterminer la diminution de la dimension latérale due à cette charge.

VI Traction d'un barreau suspendu sous l'effet de son poids



Le tronçon élémentaire est en état de traction sous l'effet du poids du matériau situé au dessous de ce tronçon.



Son allongement est:

$$\Delta(dz) = \frac{N(z)}{ES}dz = \frac{\rho g S(L-z)}{ES}dz$$

L'allongement total du barreau est donné par :

$$\boxed{\Delta L = \int_{z=0}^{z=L} \frac{N(z)}{ES}\,dz = \frac{\rho g}{E}\int_{z=0}^{L}(L-z)\,dz}$$

$$\boxed{\Delta L = \frac{\rho g}{E}\left[Lz - \frac{z^2}{2}\right]_{z=0}^{z=L} = \frac{\rho g L^2}{2E}}$$

☞ $$\boxed{\Delta L = \frac{mgL}{2ES}}$$

Exercice 4

Un barreau carré de bronze, de section constante de 49 cm^2 et de longueur 6 m, est fixé rigidement au sol. Sa base supérieure est soumise à une charge de compression de 5000 Kg.

1) Calculer la contrainte normale de compression et déduire les nouvelles dimensions du barreau.

2) Que deviennent ses dimensions si on tient compte du poids du barreau ?

On donne: $\rho_{bronze} = 0{,}008\ Kg/cm^3$.

VII Dilatation thermique

Une variation de **température** entraine généralement un allongement ou un raccourcissement. **La déformation due à la dilatation thermique** est donné par :

☞ $$\boxed{\varepsilon_T = \alpha \, \Delta T}$$

α est le coefficient de dilatation thermique.

ΔT est l'écart de température.

L'allongement ΔL_T correspondant à la variation de température se calcule par :

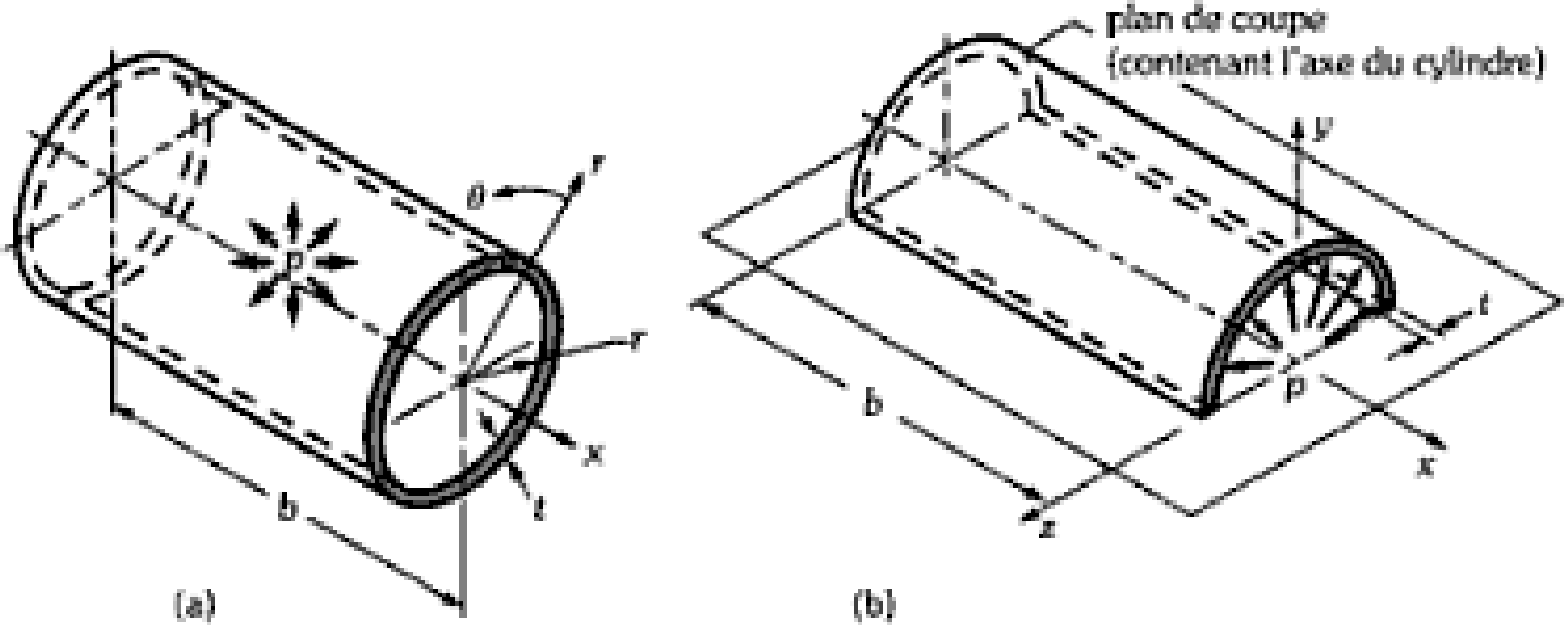
$$\boxed{\Delta L_T = \varepsilon_T L = \alpha L \, \Delta T}$$

VIII Cylindre à paroi mince sous pression

1) Cylindre ouvert

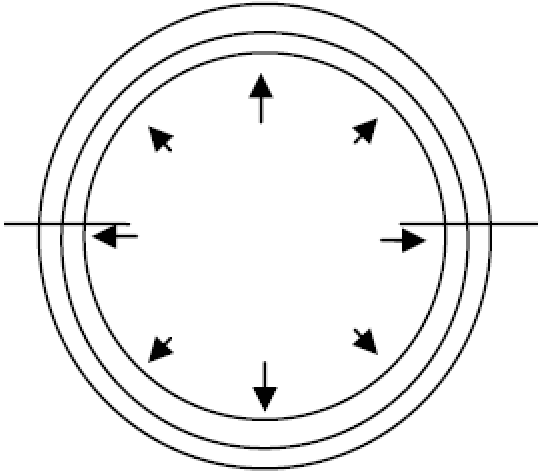
a - Géométrie du cylindre

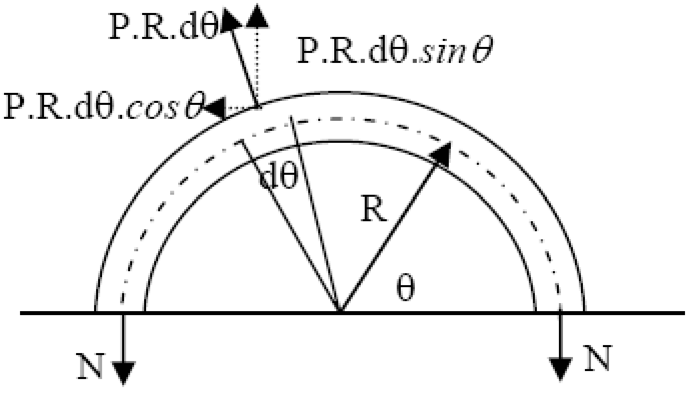
Cylindre supposé infiniment long. L'épaisseur t est beaucoup plus petite que le rayon moyen R ((t/R) < (1/10)). La contrainte est supposé être uniforme dans toute l'épaisseur de la paroi.



L’étude se fait dans le système de coordonnées cylindriques (x, r, θ), à cause de la géométrie axisymétrique du système.

b - Contrainte circonférentielle





Projection verticale : $\int_0^{\pi} \mathrm{P}\,.\,\mathrm{R}\,.\,\mathrm{Sin}\,\theta.d\theta - 2.N = 0$

$$-P.R.\cos\theta\Big|_0^{\pi} - 2.N = 0 \quad \Rightarrow \quad 2.\,P\,.\,R\ \ - 2N = \ 0$$

N est la force par unité de longueur du tirant circulaire. d'ou : $\boldsymbol{N = P.R}$

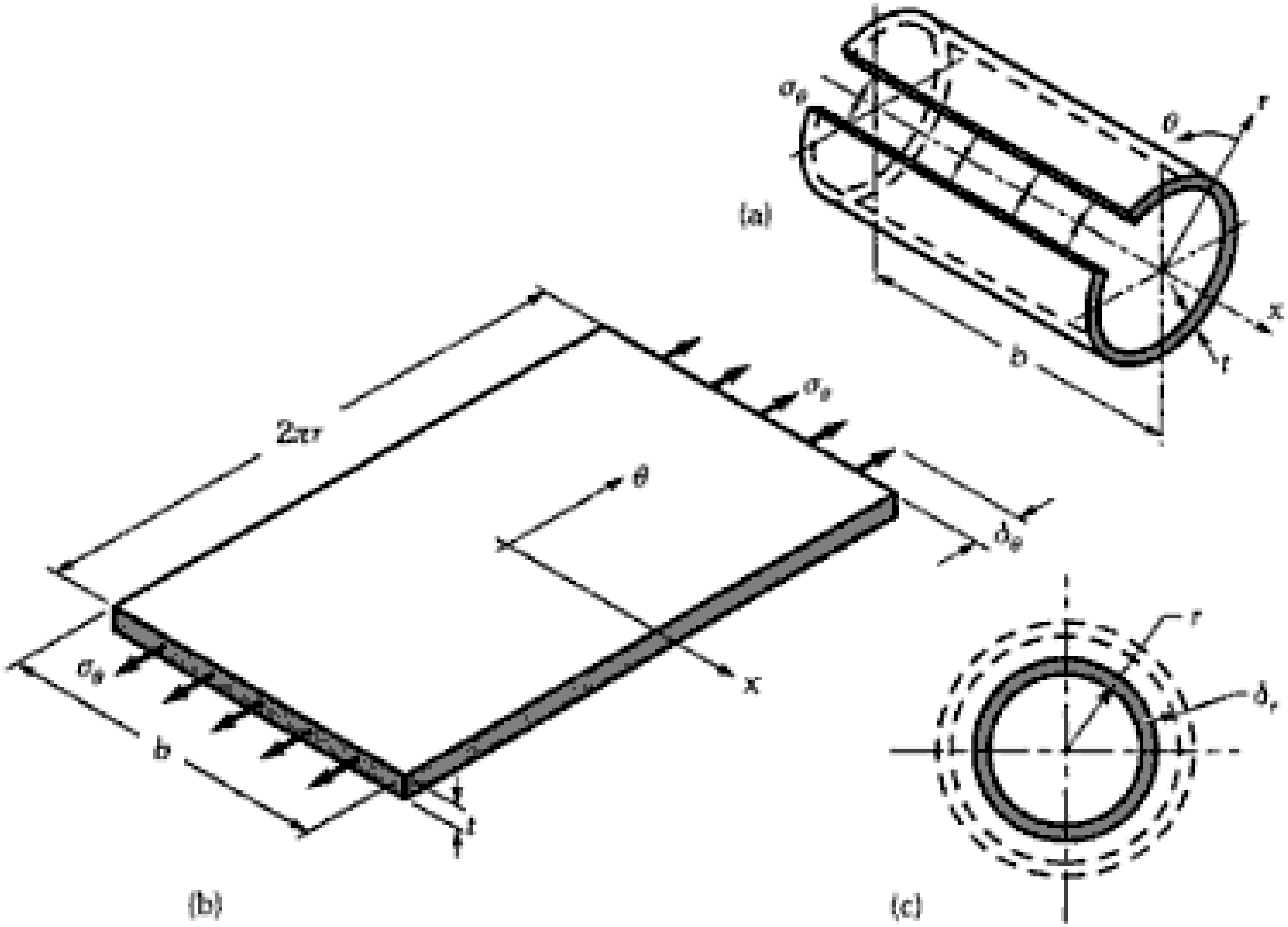
$$\boxed{\sigma_c = \sigma_\theta = \frac{\mathrm{N}}{\mathrm{t}} = \frac{\mathrm{PR}}{\mathrm{t}}}$$

c - Remarque

Les autres forces sont nulles, donc les contraintes correspondantes sont aussi nulles, d'où :

☞ $$\boxed{\sigma_r = \sigma_x = \tau_{r\theta} = \tau_{x\theta} = \tau_{xr} = 0}$$

d - Déformations



L'allongement circonférentielle (ΔC) du cylindre de longueur initiale $2\pi R$ et de section bt est donné par :

☞ $$\boxed{\Delta C = \frac{F\,(2\pi\,R)}{btE} = \frac{N\,(2\pi\,R)}{tE}}$$

☞ $$\boxed{\Delta C = \frac{\sigma_c\,(2\pi\,R)}{E} = \frac{2\pi\,R^2 P}{tE}}$$

Du point de vue pratique, c'est la variation ΔR du rayon qui nous intéresse.

☞ $$\begin{aligned} C_f &= 2\pi R + \Delta C \\ &= 2\pi(R + \Delta R) \end{aligned}$$

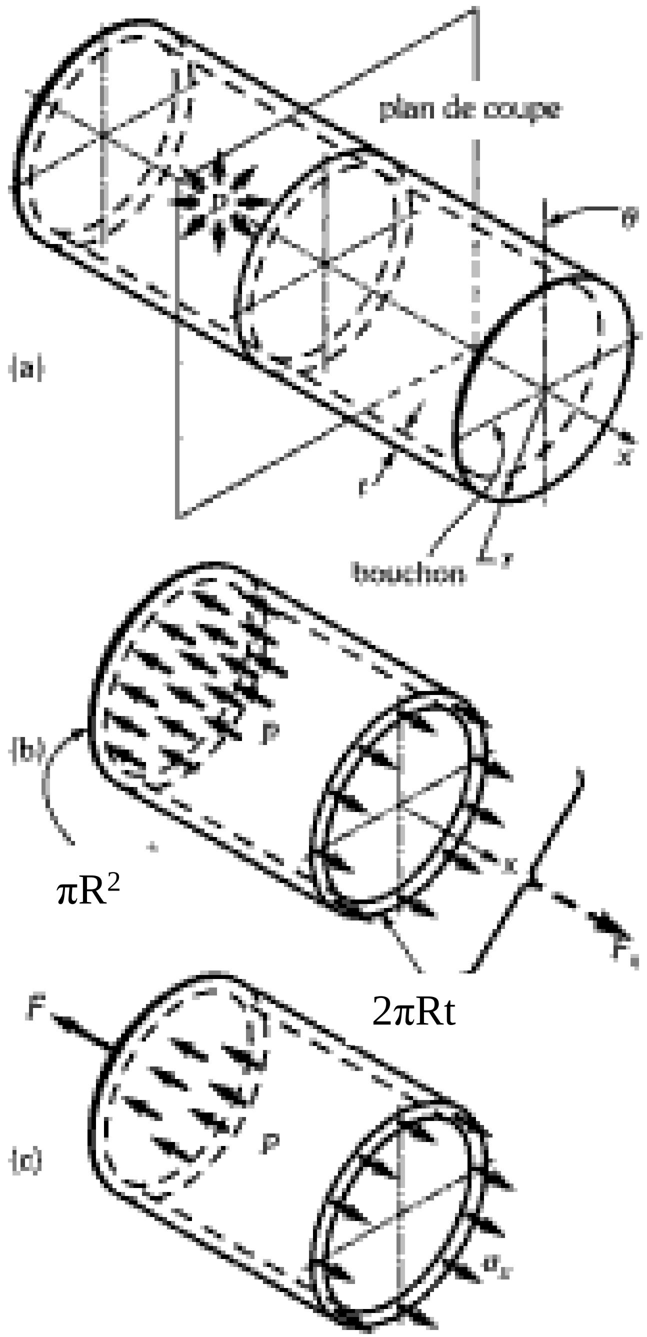
D'où :

☞ $$\Delta R = \frac{\Delta C}{2\pi} = \frac{PR^2}{tE}$$

2) Cylindre fermé

a - Géométrie du cylindre

Le cylindre est bouché aux deux extrémités. La pression exercée sur les bouchons crée par conséquent une tension longitudinale dans la paroi du cylindre, laquelle se superpose à la contrainte circonférentielle.



Une **coupe transversale** **à l'axe du cylindre permet de calculer la contrainte σ_x agissant sur la section annulaire ($2\pi Rt$).**

b - Contrainte longitudinale

σ_x génère une force $F_x = 2\pi R t \sigma_x$.

La pression exercée sur la surface du bouchon se traduit par une force $F_p = P\pi R^2$.

Equilibre, d'où :

☞ $$\boxed{\sigma_x = \frac{PR}{2t}}$$ et $$\boxed{\sigma_x = \frac{\sigma_c}{2}}$$

c - Remarque

➢ **La conduite se rompra en premier lieu le long du cylindre.**

➢ **Les autres forces sont nulles, donc les contraintes correspondantes sont aussi nulles, d'où :**

☞ $$\boxed{\sigma_r = \tau_{r\theta} = \tau_{x\theta} = \tau_{xr} = 0}$$

d - Déformations

L'allongement Δx qui en résulte pour la longueur caractéristique b est :

☞ $$\boxed{\Delta x = \frac{\sigma_x . b}{E} = \frac{PRb}{2tE}}$$